

DOI: 10.16285/j.rsm.2021.0378

变荷载下考虑半透水边界和起始水力坡降的 软土一维固结解析解

陈 余¹, 李传勋¹, 冯翠霞²

(1. 江苏大学 土木工程与力学学院, 江苏 镇江 212013; 2. 上海申元岩土工程有限公司, 上海 200011)

摘 要: 在软土地基顶面铺设的不可压缩垫层对边界排水性能具有一定影响, 同时软黏土中渗流偏离 Darcy 定律的现象对超静孔隙水压力消散的影响已逐渐被人们所熟知。但同时考虑不可压缩垫层与地基土体接触面处形成的半透水边界和起始水力坡降的固结理论却少有报道。建立了变荷载下同时考虑半透水边界和起始水力坡降的一维固结模型, 采用特征值法、Laplace 变换对所建立的固结模型开展解析求解, 分析了固结模型在不同边界条件、起始水力坡降以及加载速率下的固结特性。结果表明: 考虑起始水力坡降后, 半透水界面参数 φ (不可压缩层渗透系数和黏土层厚度之积与黏土层渗透系数和不可压缩层厚度之积的比值, 其值大小代表排水面透水能力强弱) 值越小, 孔压消散速率越慢, 固结完成所需时间越长; φ 值越大, 孔压消散速率越快, 固结完成时间越短。半透水边界条件下起始水力坡降的无量纲变量 R (起始水力坡降、水的重度与土层厚度三者之积除以外荷载) 值越大, 渗流前锋 (移动边界) 到达土层底部的时间越长, 固结完成时土中超静孔压残留值越大。相同时刻下, 按变形定义的土层平均固结度随 R 值增大而增大, 但按孔压定义的土层平均固结度随 R 值增大而变小。加载速率对考虑起始水力坡降和半透水边界的土层固结性状具有明显影响, 加载速率越慢, 超静孔隙水压力峰值越小, 且达到峰值所需时间越长, 但加载速率对最终超静孔压残留值几乎无影响。

关 键 词: 变荷载; 一维固结; 半透水边界; 起始水力坡降; 解析解

中图分类号: TU 470

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2021) 11-3008-10

Analytical solution for one-dimensional consolidation of soft soils under a partially permeable boundary condition and a time-dependent loading considering the threshold hydraulic gradient

CHEN Yu¹, LI Chuan-xun¹, FENG Cui-xia²

(1. Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China;

2. Shanghai Shen Yuan Geotechnical Engineering Co., LTD, Shanghai 200011, China)

Abstract: The placement of an incompressible cushion on the top of soft soil deposits affects the boundary drainage conditions. It has been well documented in the literature that the seepage through soft clays deviates from Darcy's law, which affects the dissipation of excess pore water pressure. However, the studies on the soil consolidation behavior under the partially permeable boundary condition induced by the incompressible cushion underlain by soil deposits considering the non-Darcian flow with the threshold hydraulic gradient have rarely been reported. In this study, a one-dimensional consolidation model under the partially permeable boundary condition and the time-dependent loading is developed. The effect of the threshold hydraulic gradient on the water flow through the soft soil is taken into account. The analytical solution is derived for the proposed consolidation model based on the eigen value method and Laplace transform. Based on the derived analytical solution, the sensitivity analysis has been conducted for the consolidation behavior under various boundary conditions, threshold hydraulic gradients and loading rates. It indicates that the smaller the partially permeable boundary parameter φ (i.e., the ratio of the product of the coefficient of permeability of the incompressible cushion and the thickness of the clay deposit to the product of the coefficient of permeability of the clay deposit and the thickness of the incompressible cushion, which indicates the permeability of the partially permeable boundary) is, the slower the dissipation of excess pore water pressure and the longer the duration of consolidation process are; the larger φ is, the faster the dissipation of excess pore pressure and the shorter the duration of consolidation process are. The larger the dimensionless variable R

收稿日期: 2021-05-13

修回日期: 2021-08-23

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 51878320)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51878320).

第一作者简介: 陈余, 男, 1996 年生, 硕士, 主要从事地基处理方面的研究工作。E-mail: chenyu19960707@yeah.net

通讯作者: 李传勋, 男, 1978 年生, 博士, 教授, 主要从事地基处理方面的教学和研究工作。E-mail: lichuanxun@yeah.net

(the ratio of the product of the threshold hydraulic gradient, the unit weight of water and the thickness of soil layer to the surcharge) is, the longer the time when the seepage front (i.e., moving boundary) reaches the bottom of soil layer is, and the greater the residual excess pore water pressure at the end of consolidation is. At a given time, the settlement-based average degree of consolidation increases with an increase in the dimensionless variable R . On the contrary, the excess pore water pressure-based average consolidation degree decreases as the dimensionless variable R increases. The loading rate significantly influences the consolidation behavior of soils with threshold hydraulic gradient under the partially permeable boundary condition. It is found that the slower the loading is, the lower the peak value of excess pore water pressure is, and the longer the time it takes to reach its peak is. However, the loading rate has negligible influence on the residual excess pore water pressure.

Keywords: time-dependent loading; one-dimensional consolidation; partially permeable boundary; threshold hydraulic gradient; analytical solution

1 引 言

软土在我国广泛分布, 在软土地基上开展基础设施建设的实例已屡见不鲜。因此, 对软土地基固结沉降问题开展深入研究具有重要的理论和实际意义。

软土固结沉降计算时常将地基边界处理为完全透水或完全不透水。实际上为加快软土的排水速度, 减少其工后沉降, 通常在软土顶面铺设不可压缩的垫层, 其与土工格栅一起可作为水平增强体达到提高地基承载力的目的。例如: 砂垫层排水性能良好, 其压缩性与下卧软土层相比可视为不可压缩层。此时求解软土固结时, 将排水边界处理成半透水边界则更贴近部分工程实际。早期以 Gray^[1]为首的一些学者研究了半透水边界条件下的固结问题。在此基础上, 谢康和^[2]求解了双层土在半透水边界条件下的一维固结问题, 并对层状土一维固结特性及其解的应用展开分析。考虑实际工程中作用于地基上的外荷载可能随时间不断变化, 李西斌等^[3]求得循环荷载作用下考虑半透水边界的软土地基一维固结解析解; 梁旭等^[4]得到了循环荷载下考虑半透水边界的固结数值解; Schiffman 等^[5]得到了半透水边界下荷载随时间呈线性增长情况下的固结解; Willson 等^[6]得到了矩形循环荷载下的固结解。此外, 王奎华等^[7]考虑软土的流变特性, 获得双面半透水边界的饱和软黏土层一维流变固结解析解。孙德安等^[8]给出了半透水边界下考虑变荷载及土体热传导性的热固结半解析解。值得注意的是, 上述研究均认为, 软黏土中水的渗流遵循 Darcy 定律。但事实上, 软土中渗流在低水力坡降下会出现偏离 Darcy 定律的现象, 但目前非 Darcy 定律下考虑半透水边界的软土固结解析解却较为少见, 大多数情况借助于数值方法解决此类问题, 如刘加才等^[9]考虑 Hansbo 渗流模型利用 Galerkin 加权残值方法得到了半透水边界一维非 Darcy 渗流固结问题的有限元数值解答。

Miller 等^[10]假定软土中渗流存在起始水力坡降, 即当且仅当水力坡降 i 大于起始水力坡降 i_0 ,

土中渗流才会发生, 这种非达西渗流模型可以认为是最简单的非达西渗流模型, 其也经常被国内外经典土力学教材所提及, 故研究考虑起始比降的软土固结理论具有一定的理论和实际意义。Pascal 等^[11]较早地利用有限差分法分析了起始水力坡降所引起的软土固结中的移动边界问题, 给出了该问题的数值解和近似解析解。Xie 等^[12]进一步获得了变荷载下考虑起始水力坡降的软土一维线性固结解析解, 并将数值解与解析解进行对比, 分析了起始水力坡降对固结性状的影响。Zhou 等^[13]给出了特定变荷载下考虑起始水力坡降的黏性土一维线性固结解析解。黄杰卿等^[14]在固相物质坐标下得到考虑起始水力坡降的饱和土体一维大应变固结控制方程, 并借助偏微分有限元软件 FlexPDE 进行了算例分析。Wang 等^[15]提出了考虑起始水力坡降的土体一维固结简化解, 其解答能更精确地满足边界条件。

以上考虑起始水力坡降的软黏土固结理论均未考虑铺设垫层所引起的边界排水能力的变化, 目前对考虑起始水力坡降与半透水边界条件下的固结理论, 特别是再考虑实际中的变荷载更少有报道。本文给出变荷载下考虑起始水力坡降及半透水边界的软土线性固结解析解, 着重分析起始水力坡降及边界透水性对固结性状的影响, 为含不可压缩排水垫层的软土地基固结计算提供理论依据, 对软黏土一维固结理论进行了有益补充。

2 固结模型的建立

2.1 固结控制方程

由于土中渗流存在起始水力坡降 i_0 , 如果以竖直向下为正, 则土中渗流 v 与水力坡降 i 间的关系为

$$v = \begin{cases} k_v (i - i_0), & i > i_0 \\ 0, & i \leq i_0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: k_v 为黏土层的渗透系数; v 为黏土层中水的流速。除土中渗流规律外, 其余基本假定与 Terzaghi 一维固结理论一致。根据侧限条件下孔隙比变化与竖向有效应力变化的关系, 排水边界至渗流锋面的

土层一维固结控制方程为

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \frac{dP(t)}{dt} \quad (2)$$

式中: u 为超静孔压; t 为时间; z 为深度; c_v 为固结系数, 其表达式为 $c_v = k_v E_s / \gamma_w$, E_s 为土体的侧限压缩模量, γ_w 为水的重度; $P(t)$ 为施加在不可压缩层顶面单调递增的外荷载。

2.2 边界条件的确定

如图 1 所示, 以不可压缩层与黏土层交界处为坐标轴起始位置, 随时间单调递增的外荷载 $P(t)$ 施加在不可压缩的砂垫层上部, 砂垫层的厚度为 l , 砂垫层的渗透系数为 k_1 。黏土层的厚度为 H , 土层底面完全不透水。

由文献[1]知, 不可压缩层的渗流满足 Darcy 定律, 不可压缩层内的超静孔压 u' 需满足方程控制方程 $\partial^2 u'(z,t) / \partial z^2 = 0$, 说明不可压缩层内超静孔压 u' 与深度 z 呈线性关系。

软黏土中水的渗流满足具有起始水力坡降的非达西渗流定律, 黏土层顶面与不可压缩层交界处超静孔隙水压力相等, 且土中水的流速及流量是连续的。基于以上认识及式(1)所描述土中水的渗流规律, 垫层与软黏土层边界处 ($z=0$) 处超静孔压及水力坡降应满足:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial z} = \frac{\varphi}{H} u(0,t) + i_0 \gamma_w \quad (3)$$

式中: $\varphi = k_1 H / (k_v l)$, k_1 为不可压缩层土的渗透系数。

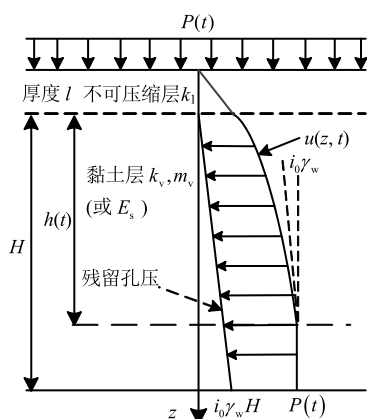


图1 软土地基固结模型

Fig.1 Schematic illustration of consolidation model in soft soil deposits

由文献[11]可知, 软黏土中渗流由于起始水力坡降的存在致使固结过程中存在着移动边界, 其移动边界处超静孔隙水压力与水力坡降应满足:

$$u[h(t), t] = P(t) \quad (4)$$

$$\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u[h(t), t]}{\partial z} = i_0 \quad (5)$$

式中: $h(t)$ 为 t 时刻移动边界 (渗流锋面) 距离地基土体透水面的距离。

3 固结模型的超静孔压解答

3.1 变荷载下固结模型的通解

令 $w(z,t) = u(z,t) - i_0 \gamma_w z$, 利用该变量代换, 式(2)描述的微分方程变为

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} + \frac{dP(t)}{dt}, 0 \leq z \leq h(t) \quad (6)$$

其求解条件应用 w 表示为

$$\left. \begin{aligned} w(z,0) &= P(0) - i_0 \gamma_w z \\ \frac{\partial w(0,t)}{\partial z} &= \frac{\varphi}{H} w(0,t) \\ \frac{\partial w[h(t),t]}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

根据文献[1]中超静孔压的表达形式, 结合式(7)给出的边界条件, 设

$$w(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \left[\lambda_n \left(\frac{z}{h(t)} - 1 \right) \right] \quad (8)$$

式中: $T_n(t)$ 为关于 t 的待定函数; λ_n 为待定参数, 需满足特征方程 $\varphi h(t)/H = \lambda_n \tan \lambda_n$, 其中 $\lambda_n > 0$ 。将其代入式(6)、(7), 得到关于 $T_n(t)$ 的微分方程:

$$T_n'(t) + c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} T_n(t) = \frac{2 \sin \lambda_n}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \frac{dP(t)}{dt} \quad (9)$$

式(9)为 $T_n(t)$ 的常微分方程, 其通解为

$$T_n(t) = e^{-c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t} \left\{ C_n + \frac{2 \sin \lambda_n}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \left[P(0) + \int_0^t \frac{dP(\tau)}{d\tau} e^{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(\tau)^2} \tau} d\tau \right] \right\} \quad (10)$$

式中: e 为指数; C_n 为待定参数; τ 为积分变量。将 $w(z,t)$ 代入式(6), 根据三角函数 (λ_n 的特征函数) 的正交性, 得

$$C_n = \frac{2 i_0 \gamma_w h(t) (1 - \cos \lambda_n)}{\lambda_n (\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n)} \quad (11)$$

结合式(11)与 $w(z,t)$ 的表达式, 得到超静孔隙水压力近似解析解的通式为

$$u(z, t) = i_0 \gamma_w z + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t} \cos \left[\lambda_n \left(\frac{z}{h(t)} - 1 \right) \right] \cdot \left\{ \frac{2i_0 \gamma_w h(t)(1 - \cos \lambda_n)}{\lambda_n (\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n)} + \frac{2 \sin \lambda_n}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \cdot \left[P(0) + \int_0^t \frac{dP(\tau)}{d\tau} e^{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} \tau} d\tau \right] \right\} \quad (12)$$

3.2 单级加载下加荷阶段的超静孔压解析解

加载阶段初始时刻外荷载为 0, 加载结束前荷载与时间成正比, 且外荷载达到峰值 q_c 后不再变化。单级加载荷载 $P(t)$ 随时间 t 的变化关系为

$$P(t) = \begin{cases} q_c t / t_c, & 0 \leq t < t_c \\ q_c, & t_c \leq t \end{cases} \quad (13)$$

式中: q_c 为单级加载的荷载峰值; t_c 为加载历时。

当 $t \leq t_c$ 时, t 时刻渗流前锋距离软黏土层顶面的距离为 h , 此时对式 (9) 进行 Laplace 变换, 令 $Y(s) = L[T_n(t)]$, 得 Laplace 变换后函数 $T_n(t)$ 的像函数 $Y_n(s)$ 为

$$Y_n(s) = \frac{2 \frac{q_c}{t_c} \sin \lambda_n - \frac{2i_0 \gamma_w h(1 - \cos \lambda_n)}{\lambda_n}}{(\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n) \left[c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} + s \right]} s \quad (14)$$

式中: s 为复参变量。对式 (14) 进行 Laplace 逆变换得到函数 $T_n(t)$ 的表达式为

$$T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t}}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \cdot \left[\frac{q_c}{t_c} \sin \lambda_n \frac{e^{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t} - 1}{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2}} - \frac{i_0 \gamma_w h(t)(1 - \cos \lambda_n)}{\lambda_n} \right] \quad (15)$$

将式 (15) 代入式 (8), 得到加荷阶段软黏土层内超静孔压解析解为

$$u(z, t) = \begin{cases} i_0 \gamma_w z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t} \cos \left[\lambda_n \left(\frac{z}{h(t)} - 1 \right) \right]}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \cdot \left[\frac{q_c}{t_c} \sin \lambda_n \frac{e^{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t} - 1}{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2}} - \frac{i_0 \gamma_w h(t)(1 - \cos \lambda_n)}{\lambda_n} \right], & z \leq h(t) \\ \frac{q_c}{t_c} t, & z > h(t) \end{cases} \quad (16)$$

根据式 (4) 和式 (16), 利用动边界处超静孔压等于外荷载的边界条件, 获得加荷阶段渗流前锋位置随时间变化关系, 令 $T_v = c_v t / H^2$, 为渗流前锋相对土层厚度的无量纲值; $T_{vc} = c_v t_c / H^2$, 为加载历时对应的时间因子; $R = i_0 \gamma_w H / q_c$, 为描述起始水力坡降与外荷载的相对无量纲变量; $X = h(t) / H$, 为时间因素; 由 T_v 、 T_{vc} 、 R 、 X 得该关系式的无量纲表达式为

$$\frac{T_v}{T_{vc}} = RX + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-T_v \frac{\lambda_n^2}{X^2}}}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \cdot \left[\sin \lambda_n \frac{e^{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_v} - 1}{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - \frac{RX}{\lambda_n} (1 - \cos \lambda_n) \right] \quad (17)$$

3.3 单级加载下持荷阶段的超静孔压解析解

当 $t > t_c$ 时, 外荷载发展至峰值且不再变化, 采用与 3.1 节相同的方法, 令 $Y_n(s) = L[T_n(t)]$, 得到持荷阶段 Laplace 变换后函数 $T_n(t)$ 函数的像函数:

$$Y_n(s) = \frac{2 \frac{q_c}{t_c} \sin \lambda_n (1 - e^{-s t_c}) - 2 \frac{i_0 \gamma_w h(1 - \cos \lambda_n)}{\lambda_n}}{(\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n) s \left[c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} + s \right]} s \quad (18)$$

对式 (18) 进行 Laplace 逆变换, 得到 $T_n(t)$ 的表达式:

$$T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t}}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \cdot \left[\frac{q_c}{t_c} \sin \lambda_n \frac{e^{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t_c} - 1}{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2}} - \frac{i_0 \gamma_w h(t)(1 - \cos \lambda_n)}{\lambda_n} \right] \quad (19)$$

将函数 $T_n(t)$ 代入式 (8) 得到当 $t > t_c$ 时的超静孔压近似解析解表达式为

$$u(z, t) = \begin{cases} i_0 \gamma_w z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t} \cos \left[\lambda_n \left(\frac{z}{h(t)} - 1 \right) \right]}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \cdot \left[\frac{q_c}{t_c} \sin \lambda_n \frac{e^{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t_c} - 1}{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2}} - \frac{i_0 \gamma_w h(t)(1 - \cos \lambda_n)}{\lambda_n} \right], & z \leq h(t) \\ q_c, & z > h(t) \end{cases} \quad (20)$$

持荷阶段 $t > t_c$ 时渗流前锋随时间变化关系为

$$1 = RX + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_v}}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \cdot \left[\sin \lambda_n \frac{e^{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - 1}{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - \frac{RX}{\lambda_n} (1 - \cos \lambda_n) \right] \quad (21)$$

4 固结模型的固结度解答

4.1 单级加载下加荷阶段的固结度解答

加荷阶段按孔压定义的平均固结度 U_{pt} 计算为

$$U_{pt} = \frac{P(t)h(t) - \int_0^{h(t)} u dz}{q_c H} \quad (22)$$

将该时段内超静孔压表达式代入式 (22), 得按孔压定义的固结度解答:

$$U_{pt} = \frac{T_v}{T_{vc}} X - \frac{RX^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X}{\lambda_n} \frac{2e^{-\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_v} \sin \lambda_n}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \cdot \left[\sin \lambda_n \frac{e^{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - 1}{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - \frac{RX}{\lambda_n} (1 - \cos \lambda_n) \right] \quad (23)$$

根据有效应力原理, 得 t 时刻土层的沉降量 $S(t)$ 为

$$S(t) = \frac{q_c H}{E_s} \frac{t}{t_c} \left(X - \frac{RX^2}{2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X q_c H}{\lambda_n E_s} \cdot \frac{2e^{-\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_v} \sin \lambda_n}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \cdot \left[\sin \lambda_n \frac{e^{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - 1}{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - \frac{RX}{\lambda_n} (1 - \cos \lambda_n) \right] \quad (24)$$

如果移动边界始终不能到达土层底部, 随着固结时间的推移, 土层的超静孔压残留值为

$$u(z, \infty) = \begin{cases} i_0 \gamma_w z, & z \leq h(t) \\ q_c, & z > h(t) \end{cases} \quad (25)$$

若移动边界最终到达土层底面, 那么黏土层中超静孔隙水压力残留值为 $u(z, \infty) = i_0 \gamma_w z$, 再结合有

效应力原理和应力应变关系得土层最终沉降量 S_{∞} 为

$$S_{\infty} = \begin{cases} \frac{q_c H}{E_s R} - \frac{i_0 \gamma_w H^2}{2 E_s R^2}, & R > 1 \\ \frac{q_c H}{E_s} - \frac{i_0 \gamma_w H^2}{2 E_s}, & R \leq 1 \end{cases} \quad (26)$$

结合式 (24) 和式 (26), 得到按变形定义的平均固结度 U_{st} :

$$U_{st} = S(t) / S_{\infty} \quad (27)$$

4.2 单级加载下持荷阶段的土层平均固结度解答

持荷阶段按孔压定义的平均固结度 U_{pt} 为

$$U_{pt} = X - \frac{RX^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X}{\lambda_n} \frac{2e^{-\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_v} \sin \lambda_n}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \cdot \left[\sin \lambda_n \frac{e^{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - 1}{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - \frac{RX}{\lambda_n} (1 - \cos \lambda_n) \right] \quad (28)$$

进而 t 时刻沉降量 $S(t)$ 为

$$S(t) = \frac{q_c H}{E_s} \left(X - \frac{RX^2}{2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X q_c H}{\lambda_n E_s} \cdot \frac{2e^{-\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_v} \sin \lambda_n}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \cdot \left[\sin \lambda_n \frac{e^{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - 1}{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - \frac{RX}{\lambda_n} (1 - \cos \lambda_n) \right] \quad (29)$$

再结合式 (26) 与式 (27), 最终可得到按变形定义的平均固结度。

5 固结模型的退化验证

5.1 半透水边界退化为完全透水边界的解答

令不可压缩层的厚度无限接近于 0, 则半透水边界可以退化为完全透水边界, 即令 φ 趋近于正无穷。当 $\varphi \rightarrow \infty$ 时, λ_n 的极限值为 $(2n-1)\pi/2$, $n=1, 2, 3, \dots$, 同时排水边界的定解条件则变为 $u(0, t) = 0$ 。

此时加荷阶段与持荷阶段的超静孔压式 (16) 和式 (20) 退化为

$$u(z,t) = \begin{cases} i_0 \gamma_w z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t}}{\lambda_n} \sin \left[\lambda_n \frac{z}{h(t)} \right] \\ \left[\frac{q_c}{t_c} \sin \lambda_n \frac{e^{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t}}{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2}} - 1 - \frac{i_0 \gamma_w h(t)}{\lambda_n} \right], z \leq h(t) \\ \frac{q_c}{t_c} t, z > h(t) \end{cases} \quad (30)$$

$$u(z,t) = \begin{cases} i_0 \gamma_w z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t}}{\lambda_n} \sin \left(\lambda_n \frac{z}{h(t)} \right) \\ \left[\frac{q_c}{t_c} \sin \lambda_n \frac{e^{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2} t}}{c_v \frac{\lambda_n^2}{h(t)^2}} - 1 - \frac{i_0 \gamma_w h(t)}{\lambda_n} \right], z \leq h(t) \\ q_c, z > h(t) \end{cases} \quad (31)$$

渗流前锋发展规律分别退化为

$$\frac{T_v}{T_{vc}} = RX + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-T_v \frac{\lambda_n^2}{X^2}}}{\lambda_n} \left(\sin \lambda_n \frac{e^{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_v}}{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - 1 - \frac{RX}{\lambda_n} \right) \quad (32)$$

$$1 = RX + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-T_v \frac{\lambda_n^2}{X^2}}}{\lambda_n} \left(\sin \lambda_n \frac{e^{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}}}{\frac{\lambda_n^2}{X^2} T_{vc}} - 1 - \frac{RX}{\lambda_n} \right) \quad (33)$$

以上解析解答恰好是文献[12]所描述的完全透水边界下考虑起始水力坡降的一维固结解析解。

5.2 渗流模型退化为达西定律的固结模型解答

当 $i_0(R)$ 为 0 时, 土层的渗流规律退化为 Darcy 定律, 固结模型退化为仅考虑变荷载与半透水边界的一维固结理论。半透水边界条件和特征方程退化为

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial z} = \frac{\varphi}{H} u(0,t) \quad (34)$$

$$\varphi/H = \lambda_n \tan \lambda_n \quad (35)$$

加荷阶段超静孔压表达式退化为

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q_c e^{-\lambda_n^2 T_v} \cos \left[\lambda_n \left(\frac{z}{H} - 1 \right) \right]}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \sin \lambda_n \frac{e^{\lambda_n^2 T_v} - 1}{\lambda_n^2 T_{vc}} \quad (36)$$

持荷阶段超静孔压表达式退化为

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q_c e^{-\lambda_n^2 T_v} \cos \left[\lambda_n \left(\frac{z}{H} - 1 \right) \right]}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \sin \lambda_n \frac{e^{\lambda_n^2 T_{vc}} - 1}{\lambda_n^2 T_{vc}} \quad (37)$$

以上解答恰好是基于达西渗流定律的半透水边界固结模型解析解。以上退化说明本文获得的固结解答具有一定的普适性, 目前存在的考虑起始水力坡降完全透水边界下的固结解和达西渗流定律下考虑半透水边界的固结解答均是本文解答的特例。

6 固结性状分析

无量纲变量 R 综合反映了外荷载、土层厚度及土中存在的起始水力坡降 i_0 , 同时 φ 可描述各种透水性的半透水边界。因此, 本文将着重分析无量纲变量 R 及半透水边界系数 φ 对固结性状的影响, 相关计算参数见表 1。

表 1 计算分析所用参数

Table 1 Parameters adopted in the current analysis

级数 项数 n	起始水力 坡降 i_0	黏土层 厚度 H/m	不可压缩层 厚度 l/m	黏土层 渗透系数 k_v $/(\text{m} \cdot \text{d}^{-1})$	不可压缩层 渗透系数 k_l $/(\text{m} \cdot \text{d}^{-1})$	加载速率无量纲 参数 $T_{vc} c_v t_c / H^2$	无量纲参数 $\varphi k_l H / (k_v l)$	无量纲参数 $R i_0 \gamma_w H / q_0$
10	0.1	10	1	1.8×10^{-4}	0.9×10^{-3}	0.03	50	0.1

6.1 起始水力坡降相关参数 R 对固结性状的影响

图 2(a)和图 2(b)分别给出两种情况下渗流移动边界随固结时间的发展过程。移动边界移动速度的快慢与 R 值息息相关, R 值越大, 移动边界下移速度越慢。

不可压缩层中的孔隙水压力与土层厚度成正比, 故研究不可压缩层底部处超静孔压的消散规律即可。如图 3 所示, 在 $T_v = 10^{-1}$ (超过加载时间) 时, 起始水力坡降无量纲变量 R 越小, 该时刻下超静孔压越大, 其中渗流符合达西定律的超静孔压最大。

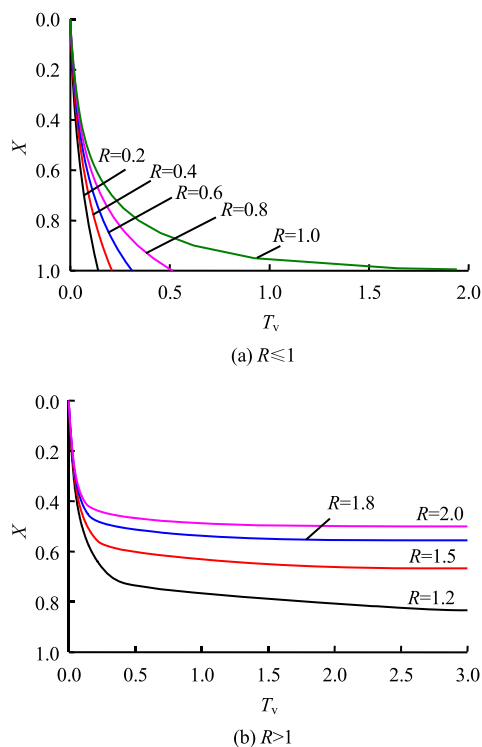


图2 R 对移动边界的影响
Fig.2 Influence of R on the moving boundary

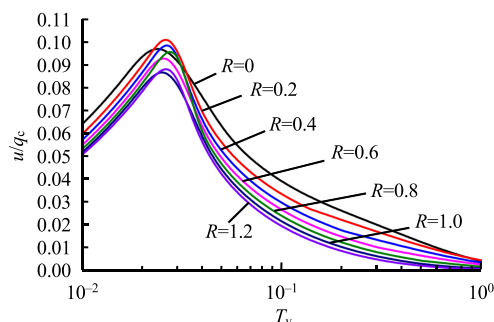


图3 R 对半透水边界处超静孔压消散的影响($z/H=0$)
Fig.3 Influence of R on the dissipation of excess pore water pressure on the partially permeable boundary ($z/H=0$)

图4为不同 R 值下 $z/H=0.3$ 处超静孔压随时间消散过程, 可发现 $R=0$ 时超静孔压的平均消散速度最快, 且其超静孔压值最终能完全消散。 R 值越大, 超静孔压随时间的变化曲线越缓, 说明其超静孔压消散速率越慢, 超静孔压最终残留值不为0, 且最终超静孔压残留值随着 R 值的增大而增大。

上述的超静孔压消散规律也可从土层固结度随时间变化规律中发现, 如图5所示。当土中水的渗流规律符合Darcy定律时, 由于最终超静孔压能够完全消散至0, 此时按孔压定义的平均固结度能到达100%。若土中水的渗流规律不符合Darcy定律, 此时超静孔压最终不能完全消散, 则平均固结度最终值亦不能至100%。相同时刻平均固结度随 R 值增大而减小, 且 R 值越大, 孔压消散完成的时间会

越短, 固结完成时间越短。

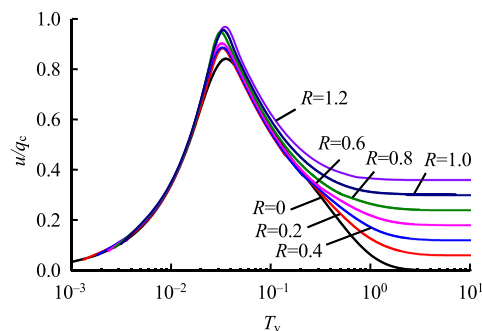


图4 R 对 u/q_c - T_v 曲线的影响($z/H=0.3$)
Fig.4 Influence of R on plot of u/q_c versus T_v ($z/H=0.3$)

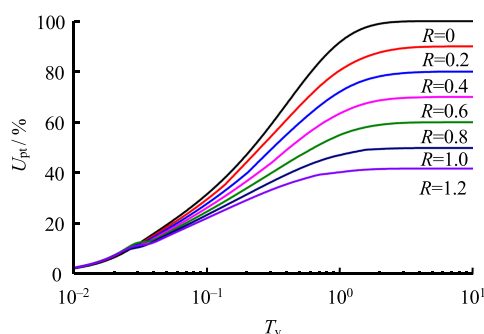


图5 R 对固结度 U_{pt} 的影响
Fig.5 Influence of R on the average degree of consolidation U_{pt}

图6为不同 R 值下沉降量随时间变化的曲线, 土层最终沉降量与 R 值息息相关, $R=0$ 时沉降量最大, 能达到0.333 m; $R=1.2$ 下沉降量最小, 仅为0.139 m。

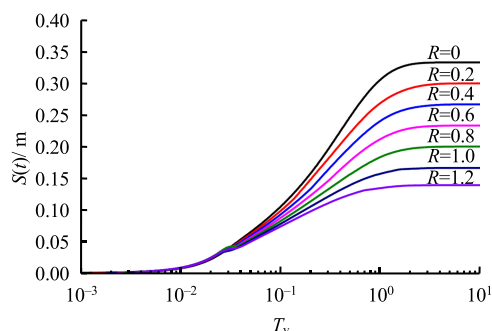


图6 R 对沉降量 $S(t)$ 的影响
Fig.6 Influence of R on the settlement $S(t)$

6.2 半透水边界相关参数 φ 对固结性状的影响

渗透系数相同下无量纲界面参数 φ 可反映不可压缩层厚度 l 和黏土层厚度 H 对固结性状的影响, 当土层厚度一定时, φ 越大, 排水边界的透水性能越好。

如图7所示, 随着界面排水能力参数 φ 值逐渐

增加, 土中超静孔压消散速率也逐渐变大, 移动边界下移速率亦会变大。 φ 值越大, 移动边界到达底部的时间越短, 当 φ 值取足够大时, 半透水边界可近似看作完全透水边界, 此时移动边界到达土层底部所用的时间最短。

以半透水边界处的超静孔压代表不可压缩层内的超静孔压。从图 8 可以发现, φ 最小时, 半透水边界处的超静孔压消散速度最慢, 说明该情况下半透水边界排水性能不良。随着 φ 的增大, 同时刻下超静孔压 u 越小, 且当 $\varphi = 50\ 000$ 时任意时刻下的超静孔压可以忽略不计, 此时半透水边界可以近似看作完全透水边界, 进一步说明了 5.1 节退化验证的合理性。

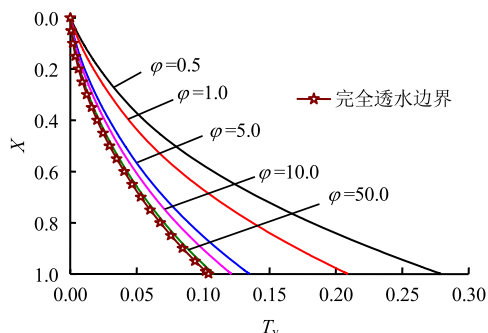


图 7 φ 对移动边界的影响
Fig.7 Influence of φ on the moving boundary

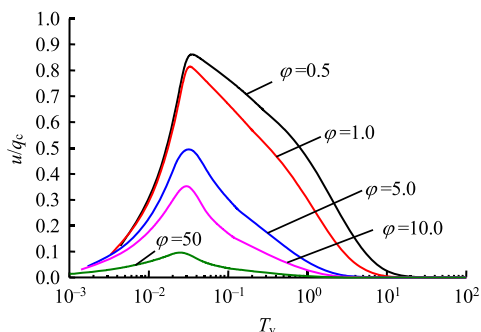


图 8 φ 对半透水边界底面处超静孔压消散的影响
($z/H=0$)

Fig.8 Influence of φ on the dissipation of excess pore water pressure on the partially permeable boundary ($z/H=0$)

图 9 为不同参数下 $z/H = 0.3$ 处超静孔压随时间因子 T_v 的变化曲线, 其描述了无量纲变量 φ 对超静孔压消散的影响。边界参数 φ 值越大, 其超静孔压随时间变化规律越接近于完全透水边界下的 $u/q_0 - T_v$ 曲线。但 φ 值越小, 起始水力坡降 i_0 对超静孔压消散速率的影响越大, 其平均消散速率会随着 φ 的减小而减小。但 φ 的大小对超静孔压最终残留值没有影响。

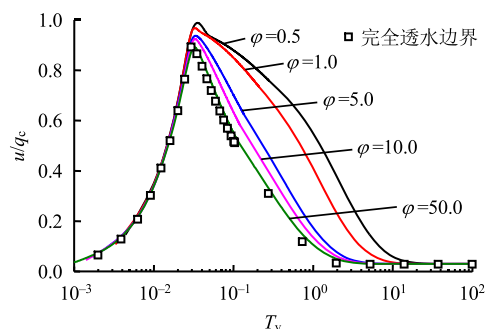


图 9 φ 对 $u/q_c - T_v$ 曲线的影响($z/H=0.3$)
Fig.9 Influence of φ on plot of u/q_c versus T_v ($z/H=0.3$)

上述固结性状在固结度随时间发展曲线中进一步展现。如图 10 所示, φ 值越大, 相同时间下地基按孔压定义的平均固结度越高; φ 值越小, 相同时间下地基固结度越低。但 φ 值对土体最终固结度基本无影响, 其最终平均固结度与完全透水边界下的平均固结度的值相等。

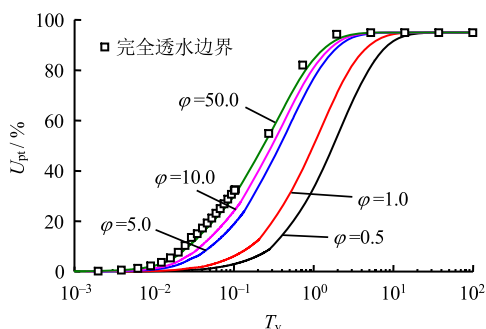


图 10 φ 对固结度 U_{pt} 的影响
Fig.10 Influence of φ on the average degree of consolidation U_{pt}

图 11 是不同 φ 值下沉降量随时间变化的关系曲线。从图中可以发现, φ 的大小对地基最终沉降量值没有影响。且同时刻下 φ 越大, 沉降量越大, 说明该时刻下按变形沉降定义的固结程度越高, 其曲线越接近完全透水边界下的曲线。

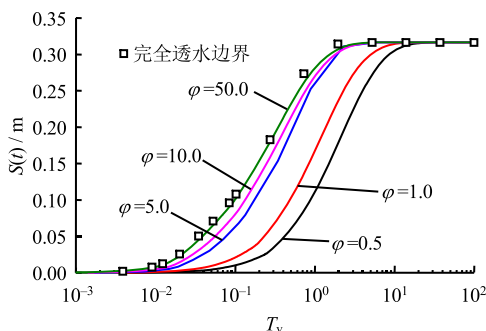


图 11 φ 对沉降量 $S(t)$ 的影响
Fig.11 Influence of φ on the settlement $S(t)$

6.3 加载速率对固结性状的影响

初始荷载为 0, T_{vc} 时刻外荷载达到最大值 q_c , 因此在起始水力坡降与边界排水性保持不变的情况下, 时间因子 T_{vc} 反映了外荷载加载速度对固结性状的影响。 T_{vc} 越大, 外荷载加载速度越慢; T_{vc} 越小, 外荷载加载速度越快。

外荷载加载速率对固结性状有较大的影响。图 12 是不同加载速率下移动边界的位置 X 随时间因子 T_v 变化曲线。由图中可发现, 加载速率越大, 移动边界到达土层底面的时间越短; 加载速率越小, 移动边界到达土层底面的时间越长。

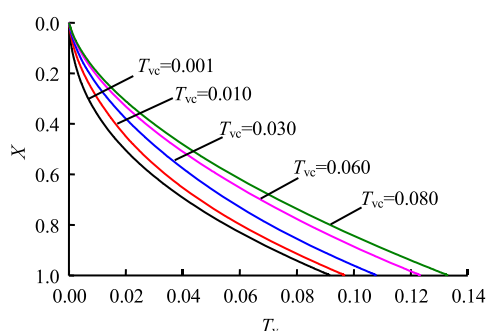


图 12 T_{vc} 对移动边界的影响
Fig.12 Influence of T_{vc} on the moving boundary

图 13 是 $z/H = 0.3$ 处超静孔压随时间变化曲线。由图中可知, T_{vc} 的取值不影响超静孔压最终残留值。外荷载加载速度越快, 超静孔压到达最大值的时间越短, 同时其最大值随加载速度的增大而增大。且加载时间越短, 其超静孔压曲线上有一个较为明显的平台阶段, 说明移动边界仍未至该处, 此处超静孔压暂还未消散。

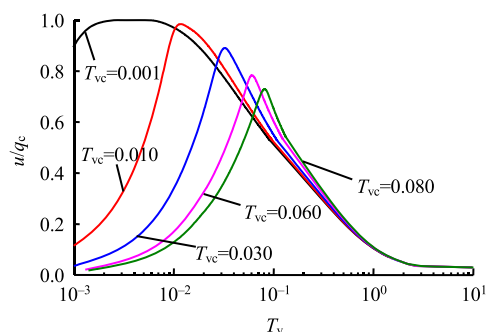


图 13 T_{vc} 对 u/q_c-T_v 曲线的影响($z/H=0.3$)
Fig.13 Influence of T_{vc} on plot of u/q_c versus T_v ($z/H=0.3$)

7 结 论

(1) 本文给出了单级加载下同时考虑半透水边界和起始水力坡降的软土一维固结的孔压、固结度

解答。该解答对半透水边界下实际软土固结计算具有一定的参考。

(2) 本文解可退化为 Darcy 定律下考虑半透水边界的软土一维固结解及考虑存在起始水力坡降完全透水边界的软土一维固结解。

(3) 半透水边界对起始水力坡降所引起的移动边界下移速度影响较大, 且边界排水性能越好, 渗流移动边界下移速度越快。但总体而言, 考虑起始水力坡降后半透水边界排水能力对固结性状的影响与 Darcy 定律下相比没有发生根本改变。

(4) 在边界条件为半透水边界且渗流规律符合考虑起始水力坡降的非达西渗流的情况下, 外荷载加载速率的大小对软土固结性状的影响较大。

参 考 文 献

- [1] GRAY H. Simultaneous consolidation of contiguous layers of unlike compressible soil[J]. **Transactions, ASCE**, 1945(110): 1327-1356.
- [2] 谢康和. 层状土半透水边界一维固结分析[J]. 浙江大学学报(自然科学版), 1996, 30(5): 567-575.
XIE Kang-he. One dimensional consolidation analysis of layered soils with impeded boundaries[J]. **Journal of Zhejiang University(Natural Sciences)**, 1996, 30(5): 567-575.
- [3] 李西斌, 谢康和. 循环荷载下半透水边界一维固结解析解[J]. 岩土力学, 2005, 26(1): 155-159.
LI Xi-bin, XIE Kang-he. Theory of 1-D consolidation of soft clayey soil with impeded boundaries under cyclic loading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(1): 155-159.
- [4] 梁旭, 蔡袁强, 吴世明, 等. 半透水边界饱和土层在循环荷载作用下的一维固结分析[J]. 水利学报, 2002(7): 31-36.
LIANG Xu, CAI Yuan-qiang, WU Shi-ming, et al. 1-D consolidation analysis of saturated soil with semi-pervious boundaries under cyclic loads[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2002(7): 31-36.
- [5] SHIFFTMAN R L, STEIN J R. One-dimensional consolidation of layered systems[J]. **Journal of Soil Mechanics and Foundations Division**, 1970, 96(4): 1499-1504.
- [6] WILSON N E, ELGOHARY M M. Consolidation of soils under cyclic loading[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1974; 11(3): 420-423.